Abdelmalek Essaadi
Ecole Nationale des
Sciences Appliquées
Al Hoceima

Analyse 3: Fonctions de Plusieurs Variables
chapter 1: Espaces Métriques et Espaces Vectoriels Normés
AP2: Deuxième Année Cycle Préparatoire

Rédigé par: Ahmed Moussaid

Professeur Assistant
Département de Mathématiques-Informatique
ENSAH

November 23, 2020

Plan

1. Espaces Métriques

Distance

Définition

Soit X un ensemble. Une application:

$$\begin{array}{rccc} d & : & X \times X & \to & \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} \\ & & (x, y) & \mapsto & d(x, y) \end{array}$$

est appelée distance sur X si elle vérifie:
pour tout x ; y et $z \in X$, on ait

1. *Positivité :* $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$
2. *Séparation :* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. *Symétrie :* $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$
4. *Inégalité triangulaire :* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$

Distance

Définition

Soit X un ensemble. Une application:

$$\begin{array}{rclcc} d & : & X \times X & \to & \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}/x \geq 0\} \\ & & (x, y) & \mapsto & d(x, y) \end{array}$$

est appelée distance sur X si elle vérifie:
pour tout x ; y et $z \in X$, on ait

1. *Positivité : $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$*
2. *Séparation : $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$*
3. *Symétrie : $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$*
4. *Inégalité triangulaire : $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$*

Distance

Définition

Soit X un ensemble. Une application:

$$\begin{array}{cccc} d & : & X \times X & \to & \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}/x \geq 0\} \\ & & (x,y) & \mapsto & d(x,y) \end{array}$$

est appelée distance sur X si elle vérifie:
pour tout x ; y et $z \in X$, on ait

1. *Positivité : $d(x,y) \geq 0, \forall x, y \in X$*
2. *Séparation : $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$*
3. *Symétrie : $d(x,y) = d(y,x), \forall x, y \in X$*
4. *Inégalité triangulaire : $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \forall x, y, z \in X$*

Distance

Définition

Soit X un ensemble. Une application:

$$\begin{array}{cccc} d & : & X \times X & \rightarrow & \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}/x \geq 0\} \\ & & (x,y) & \mapsto & d(x,y) \end{array}$$

est appelée distance sur X si elle vérifie:
pour tout x ; y et $z \in X$, on ait

1. *Positivité :* $d(x,y) \geq 0, \forall x, y \in X$
2. *Séparation :* $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. *Symétrie :* $d(x,y) = d(y,x), \forall x, y \in X$
4. *Inégalité triangulaire :* $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \forall x, y, z \in X$

Distance

Définition

Soit X un ensemble. Une application:

$$\begin{array}{cccc} d & : & X \times X & \rightarrow & \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}/x \geq 0\} \\ & & (x,y) & \mapsto & d(x,y) \end{array}$$

est appelée distance sur X si elle vérifie:
pour tout x ; y et $z \in X$, on ait

1. *Positivité :* $d(x,y) \geq 0, \forall x,y \in X$
2. *Séparation :* $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. *Symétrie :* $d(x,y) = d(y,x), \forall x,y \in X$
4. *Inégalité triangulaire :* $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \forall x,y,z \in X$

Distance

Définition

Soit X un ensemble. Une application:

$$\begin{array}{cccc} d & : & X \times X & \to & \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}/x \geq 0\} \\ & & (x,y) & \mapsto & d(x,y) \end{array}$$

est appelée distance sur X si elle vérifie:
pour tout x ; y et $z \in X$, on ait

1. *Positivité :* $d(x,y) \geq 0, \forall x, y \in X$
2. *Séparation :* $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. *Symétrie :* $d(x,y) = d(y,x), \forall x, y \in X$
4. *Inégalité triangulaire :* $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \forall x, y, z \in X$

Distance

Quelques Exemples:

1. Prenons $X = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a une distance définie, pour tous x et $y \in X$ par

$$d(x, y) = \mid x - y \mid$$

appelée distance usuelle.
oú $\mid . \mid$: représente la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ ou le module dans $\mathbb{C}$.

Distance

Quelques Exemples:

1. Prenons $X = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a une distance définie, pour tous x et $y \in X$ par
$$d(x, y) = \mid x - y \mid$$
appelée distance usuelle.
oú $\mid . \mid$: représente la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ ou le module dans $\mathbb{C}$.

Distance

1. Prenons $X = \mathbb{K}^n$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour tous $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{K}^n$, l'application définie par:

$$d_1(x, y) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$d_2(x, y) \stackrel{def}{=} (\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$d_\infty(x, y) \stackrel{def}{=} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

alors d_1, d_2 et d_∞ sont des distances sur $\mathbb{K}^n$; d_2 est appelée distance euclidienne classique sur $\mathbb{K}^n$.

Distance

1. Prenons $X = \mathbb{K}^n$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour tous $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{K}^n$, l'application définie par:

$$d_1(x, y) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$d_2(x, y) \overset{def}{=} (\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$d_\infty(x, y) \overset{def}{=} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

alors d_1; d_2 et d_∞ sont des distances sur $\mathbb{K}^n$; d_2 est appelée distance euclidienne classique sur $\mathbb{K}^n$.

Distance

1. Prenons $X = \mathbb{K}^n$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour tous $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{K}^n$, l'application définie par:

$$d_1(x, y) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$d_2(x, y) \stackrel{def}{=} (\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$d_\infty(x, y) \stackrel{def}{=} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

alors d_1; d_2 et d_∞ sont des distances sur $\mathbb{K}^n$; d_2 est appelée distance euclidienne classique sur $\mathbb{K}^n$.

Distance

1. Prenons $X = \mathbb{K}^n$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour tous $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{K}^n$, l'application définie par:

$$d_1(x, y) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$d_2(x, y) \stackrel{def}{=} (\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$d_\infty(x, y) \stackrel{def}{=} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

alors d_1; d_2 et d_∞ sont des distances sur $\mathbb{K}^n$; d_2 est appelée distance euclidienne classique sur $\mathbb{K}^n$.

Distance

1. Prenons $X = \mathbb{K}^n$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour tous $x = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $y = (y_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\mathbb{K}^n$, l'application définie par:

$$d_1(x,y) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$d_2(x,y) \stackrel{def}{=} (\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$d_\infty(x,y) \stackrel{def}{=} \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$$

alors d_1; d_2 et d_∞ sont des distances sur $\mathbb{K}^n$; d_2 est appelée distance euclidienne classique sur $\mathbb{K}^n$.

Distance

PROPOSITION

Nous avons les propriétés suivantes.

1. *Pour $x_1; \cdots ; x_n$ des points de X on a:*

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$$

2. *Pour tout x, y et z dans X on a:*

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$$

3. *Pour $x; x'$ et $y; y'$ dans X on a:*

Distance

PROPOSITION

Nous avons les propriétés suivantes.

1. *Pour $x_1; \cdots ; x_n$ des points de X on a:*

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$$

2. *Pour tout x, y et z dans X on a:*

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$$

3. *Pour $x; x^{'}$ et $y; y^{'}$ dans X on a:*

Distance

PROPOSITION

Nous avons les propriétés suivantes.

1. *Pour $x_1; \cdots ; x_n$ des points de X on a:*

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$$

2. *Pour tout x, y et z dans X on a:*

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$$

3. *Pour $x; x^{'}$ et $y; y^{'}$ dans X on a:*

Distance

PROPOSITION

Nous avons les propriétés suivantes.

1. *Pour $x_1; \cdots; x_n$ des points de X on a:*

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$$

2. *Pour tout x, y et z dans X on a:*

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$$

3. *Pour $x; x'$ et $y; y'$ dans X on a:*

Distance

PROPOSITION

Nous avons les propriétés suivantes.

1. *Pour $x_1; \cdots ; x_n$ des points de X on a:*

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$$

2. *Pour tout x, y et z dans X on a:*

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$$

3. *Pour $x; x^{'}$ et $y; y^{'}$ dans X on a:*

Distance

$$|d(x,y) - d(x^{'},y^{'}| \leq d(x,x^{'}) + d(y,y^{'})$$

Démonstration.

1. La démonstration de (1) est immédiate par récurrence sur n.
2. Pour (2), nous avons, en effet,

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \qquad (\text{ inégalité triangulaire})$$

ce qui donne

$$d(x,y) - d(y,z) \leq d(x,z)$$

En permutant x et z, on a de la même manière

$$d(z,y) - d(y,x) \leq d(x,z)$$

ce qui donne finalement

Distance

$$-d(x,z) \leq d(x,y) - d(y,z) \leq d(x,z)$$

Démonstration.
3- Pour x; $x^{'}$ et y; $y^{'}$ dans X on a

$$d(x,y) \leq d(x,x^{'}) + d(x^{'},y^{'}) + d(y^{'},y)$$

d'où

$$d(x,y) - d(x^{'},y^{'}) \leq d(x,x^{'}) + d(y^{'},y)$$

En permutant les couples $(x;y)$ et $(x^{'};y^{'})$ on a

$$d(x^{'},y^{'}) - d(x,y) \leq d(x,x^{'}) + d(y^{'},y)$$

Distance

PROPOSITION

Soient d_1 et d_2 deux distances sur X. On suppose qu'il existe α, $\beta > 0$ tels que

$$\alpha d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \beta d_2(x, y) \qquad \forall x, y \in X$$

Alors d_1 et d_2 sont dites ***équivalentes***.

Espaces Mètriques

Définition

On appelle Espace mètrique tout ensemble non vide X muni d'une distance d et on le note $(X; d)$.

Boules et Sphères

Définition

Soit $(X; d)$ *un espace métrique.*

1. *Pour* $a \in X$ *et* $r \geq 0$, *on définit les ensembles suivants:*
   - $B(a, r) = \{x \in X, d(x, a) < r\}$, *boule ouvert de centre a et rayon r.*
   - $\overline{B}(a, r) = \{x \in X, d(x, a) \leq r\}$, *boule férmée de centre a et rayon r.*
   - $S(a, r) = \overline{B}(a, r) \setminus B(a, r) = \{x \in X, d(x, a) = r\}$, *sphère de centre a et rayon r.*

ouvert et fermée

Définition

Soit $(X; d)$ *un espace métrique.*

1. *Une partie* $U \subset X$ *est dite ouverte si*

$$\forall a \in U, \quad \exists r > 0 \quad t.q. \quad B(a,r) \subset U$$

2. *Une partie* $F \subset X$ *est dite fermée si son complémentaire* $F^c = X \setminus F$ *est ouvert.*
3. *Une partie* $A \subset X$ *est dite bornée si*

$$\exists M > 0, \quad \forall x, y \in A, \quad d(x,y) \leq M$$

Lemme

Si x est dans X, pour
$\epsilon < \epsilon^{'}, \quad B(x,\epsilon) \subset B(x,\epsilon^{'}), \quad et \quad \overline{B(x,\epsilon)} \subset \overline{B(x,\epsilon')}$

Propriétés des ensembles ouverts

Théoréme

Soit (E, d) un espace métrique. Alors

1. $\emptyset$ *et* E *sont des ouverts.*
2. *Si* $(\vartheta_i)_{i\in I}$ *est une famille quelconque d'ouverts, alors* $\cup_{i\in I}\vartheta_i$ *est ouvert.*
3. *Si* $\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_n$ *sont des ouverts, alors* $\vartheta_1 \cap \vartheta_2 \cap \ldots \cap \vartheta_n$ *est ouvert.*

Démonstration:

1. Evident.
2. Soient $\vartheta = \cup_{i\in I}\vartheta_i$ et $x \in \vartheta$ alors $\exists i_0 \in I$ tel que $x \in \vartheta_{i_0}$
   comme ϑ_{i_0} est ouvert
   $\Rightarrow \quad \exists r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \vartheta_{i_0} \Rightarrow \quad B(x,r) \subset \cup_{i\in I}\vartheta_i = \vartheta$
   comme $x \in \vartheta$ était quelconque $\Rightarrow \vartheta$ est ouvert.
3. Soit $x \in \vartheta_1 \cap \vartheta_2 \cap \ldots \cap \vartheta_n$ alors $x \in \vartheta_1$, et $x \in \vartheta_2$ et $\cdots$ et $x \in \vartheta_n$.
   comme ϑ_i est ouvert, il existe $r_1 > 0, r_2 > 0, \cdots, r_n > 0$ tels que $B(x,r_1) \subset \vartheta_1$ et $B(x,r_2) \subset \vartheta_2$ et, $\cdots$ et $B(x,r_n) \subset \vartheta_n$.
   soit $r = \min(r_1, r_2, \cdots, r_n)$.
   Alors $B(x,r) \subset \vartheta_1 \cap \vartheta_2 \cap \ldots \cap \vartheta_n$.
   donc $\vartheta_1 \cap \vartheta_2 \cap \ldots \cap \vartheta_n$ est ouvert.

Intérieur, adhérence

Définition

Soit $(X; d)$ un espace métrique, et A une partie de X.
- On appelle intérieur de A et on le note A° le plus grand ouvert inclus dans A. Tout point $x \in A^\circ \subset A$ est dit intérieur à A.

$$A^\circ = \bigcup_{U \text{ Ouvert}, \quad U \subset A} U$$

- On appelle adhérence de A et on la note $\overline{A}$ le plus petit fermée qui contient A. Un point x de $\overline{A}$ est dit adhérence à A.

$$\overline{A} = \bigcap_{F \text{ ferm}, \quad F \supset A} F$$

Intérieur, adhérence

Définition

Soit $(X; d)$ un espace métrique, et A une partie de X.
- On appelle intérieur de A et on le note A° le plus grand ouvert inclus dans A. Tout point $x \in A^\circ \subset A$ est dit intérieur à A.

$$A^\circ = \bigcup_{U\ Ouvert,\quad U \subset A} U$$

- On appelle adhérence de A et on la note $\overline{A}$ le plus petit fermée qui contient A. Un point x de $\overline{A}$ est dit adhérence à A.

$$\overline{A} = \bigcap_{F\ ferm,\quad F \supset A} F$$

voisinage, intérieur

Définition

Soit $(X; d)$ *un espace mètrique.*

1. *Soit* V *un sous-ensemble de* X *et* $x \in X$ *: on dit que* V *est un voisinage de* x *s'il contient une boule ouverte de centre* x.
2. *Soit* A *un sous-ensemble de* X *: on dit qu'un élément* a *de* X *est un point intérieur à* A *si* A *est un voisinage de* a *ou, ce qui est équivalent, s'il existe* $r > 0$ *tel que* $B(a; r) \subset A$. *On appelle intérieur de* A *et on note* A° *l'ensemble des points intérieurs à* A.

ouvert, fermé,adhérence, intérieur

PROPOSITION

Soit A est un sous ensemble d'un espace métrique F. Alors :

- *A° est un ouvert contenu dans A.*
- *Si U est un ouvert et $U \subset A$, alors $U \subset A^\circ$.*
  Autrement dit, A° est le plus grand ouvert contenu dans A.
- *$\overline{A}$ est un fermé contenant A.*
- *Si F est un fermé et $F \supset A$, alors $F \supset \overline{A}$*
  Autrement dit, $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

ouvert, fermé,adhérence, intérieur

PROPOSITION

Soit A est un sous ensemble d'un espace métrique F. Alors :

- *A° est un ouvert contenu dans A.*
- *Si U est un ouvert et $U \subset A$, alors $U \subset A^\circ$.*
  Autrement dit, A° est le plus grand ouvert contenu dans A.
- *$\overline{A}$ est un fermé contenant A.*
- *Si F est un fermé et $F \supset A$, alors $F \supset \overline{A}$*
  Autrement dit,$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Remarque

1-Si x appartient à A° il existe, $\varepsilon > 0$, tel que $x \in B(x, \varepsilon) \subset A^\circ \subset A$

2- Un point x est dans $\overline{A}$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0, \quad B(x, \varepsilon)$ intersecte A.

PROPOSITION

Soient A et B, deux sous ensembles d'un espace métrique E. Alors :

1. On a $A \subset B \Rightarrow A^{\circ} \subset B^{\circ}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$
2. $x \in A^{\circ} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$
3. $x \in \overline{A}, \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$
4. A ouvert $\Leftrightarrow A = A^{\circ}$
5. A fermé $\Leftrightarrow A = \overline{A}$
6. A ouvert $\Leftrightarrow A$ est une union de boules ouvertes.

Démonstration.(Exercice)

PROPOSITION

Soient A et B, deux sous ensembles d'un espace métrique E. Alors :

1. *On a* $A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$ *et* $\overline{A} \subset \overline{B}$
2. $x \in A^\circ \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ *tel que* $B(x, \varepsilon) \subset A$
3. $x \in \overline{A}, \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$
4. A *ouvert* $\Leftrightarrow A = A^\circ$
5. A *fermé* $\Leftrightarrow A = \overline{A}$
6. A *ouvert* $\Leftrightarrow A$ *est une union de boules ouvertes.*

Démonstration.(Exercice)

une suite extraite

Définition

Si (x_n) est une suite, on notera une suite extraite (sous-suite) soit par (x_{n_k}), soit par $(x_{\varphi(n)})$.
Dans le premier cas n_0, $n_1, \cdots$, est une suite strictement croissante d'entiers .
dans le second, $\varphi: \quad \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.
Par abus de notation, si tous les termes d'une suite (x_n) appartiennent à un ensemble X , on écrit $(x_n) \subset X$.

une suite convergente

Définition

Soit $(X; d)$ *un espace métrique. Si* $(x_n) \subset X$ *et* $x \in X$*, alors, par définition,* $x_n \to x$*,* $((x_n)$ *converge vers* $x)$ *si et seulement si* $d(x_n; x) \to 0$.

Une suite (x_n) *est convergente s'il existe un* $x \in X$ *tel que* $x_n \to x$.

On écrit alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$

Traduction de $x_n \to x$*: pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

On dit que la suite $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ *diverge ou est divergente si elle n'est pas convergente.*

une suite convergente

Il est évident, à partir de la définition, que si $x_n \to x$, et si (x_{n_k}) est une sous-suite, alors $x_{n_k} \to x$

Rq:

Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, cette définition coïncide avec la définition usuelle de la convergence.

valeur d'adhérence

Définition

Soit $(X; d)$ un espace métrique. Si $(x_n) \subset X$ et $x \in X$, alors, par définition, x est une ***valeur d'adhérence*** *de la suite (x_n) s'il existe une sous-suite (x_{n_k}) telle que $x_{n_k} \to x$.*

Exemple

Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, soit $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Alors 1 est une valeur d'adhérence de (x_n), car $x_{2n} \to 1$.

valeur d'adhérence

Définition

Soit $(X; d)$ un espace métrique. Si $(x_n) \subset X$ et $x \in X$, alors, par définition, x est une ***valeur d'adhérence*** *de la suite (x_n) s'il existe une sous-suite (x_{n_k}) telle que $x_{n_k} \to x$.*

Exemple

Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, soit $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Alors 1 est une valeur d'adhérence de (x_n), car $x_{2n} \to 1$.

PROPOSITION

Soit $(X; d)$ un espace métrique.

1. *Si une suite (x_n), $n \in \mathbb{N}$ d'éléments de X converge vers $x \in X$, alors x est unique : on dit alors que x est la limite de la suite (x_n), $n \in \mathbb{N}$;*
2. *on peut énoncer la définition de la convergence d'une suite avec le langage des voisinages : une suite (x_n), $n \in \mathbb{N}$ d'éléments de X converge vers $x \in X$ si pour tout voisinage V de x ,*
   $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow x_n \in V$
3. *Si $x_n \to x$, alors x est la seule valeur d'adhérence de la suite (x_n).*
4. *une suite $(x_n)_n$ d'éléments de X converge vers $x \in X$ si et seulement si la suite de réels positifs $(d(x_n; x))_n$ converge vers 0.*

Suites de Cauchy

Définition

Soit $(x_n)_n$ une suite dans un espace métrique $(X; d)$. On dit que $(x_n)_n$ est suite de Cauchy si elle satisfait:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall m \geq n_0, \quad d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

Remarque

La définition est équivalente à

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall p \geq 0, \quad d(x_n, x_{n+p}) \leq \varepsilon$$

Suites de Cauchy

Définition

Soit $(x_n)_n$ une suite dans un espace métrique $(X;d)$. On dit que $(x_n)_n$ est suite de Cauchy si elle satisfait:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall m \geq n_0, \quad d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

Remarque

La définition est équivalente à

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall p \geq 0, \quad d(x_n, x_{n+p}) \leq \varepsilon$$

Exemple

dans $\mathbb{R}$, la suite$(\frac{1}{n})$ est de Cauchy.
Autrement dit, une suite de Cauchy est une suite dont les éléments sont arbitrairement proches à partir d'un certain rang.
En effet, on peut aisément montrer qu'une suite est de Cauchy si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une boule B_ε (ouverte ou fermée, cela ne change rien) de rayon ε (dont le centre n'est pas précisé mais dépend possiblement de ε) qui contient tous les élements de la suite à partir d'un certain rang

$$\exists n_0 \geq 0, \quad tq, \quad \forall n \geq n_0, \quad x_n \in B_\varepsilon$$

PROPOSITION

-Dans un espace métrique $(X; d)$ toute suite convergente est de Cauchy.

Preuve: Soit $(x_n)_n$ une suite qui converge vers une limite x. Pour $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ fixé, on peut trouver n_0 tel que $d(x_n; x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout n_0. Ainsi, si $n \geq n_0$ et $m \geq n_0$, on a par inégalité triangulaire

$$d(x_n, x_m) < d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon$$

Ceci montre bien que la suite est de Cauchy.

PROPOSITION

1. *Dans un espace métrique $(X; d)$ Toute suite de Cauchy est bornée. Ceci résulte essentiellement du fait que, pour tout $n \geq n_0$, $x_n \in B_f(x_{n_0}; \varepsilon)$.*
2. *Si les métriques d et d' sont équivalentes sur X, alors toute suite de Cauchy pour d est une suite de Cauchy pour d'.*

Espaces métriques complets

Définition

Un espace métrique $(X; d)$ *est dit complet si toute suite de Cauchy dans* $(X; d)$ *est convergente.*

Espaces métriques complets

PROPOSITION

1. *Soit* (X, d) *un espace métrique complet et* $F \subset X$. *Alors* (F, d) *est complet si et seulement si* F *est fermé dans* X.
2. *Soit* (X, d) *un espace métrique. Si* X *est compact alors il est borné : il existe* $M > 0$ *tel que* $\forall x, y \in, \quad d(x, y) \leq M$.